**Экстраполяция Ричардсона. Дополнительно об аппроксимации.**

Экстраполяцию Ричардсона можно рассматривать как общий метод повышения точности приближений, когда известна структура погрешности. Для улучшения аппроксимации, нам потребуется более глубокое понимание структуры погрешности. Поэтому начнём с разложений Тейлора для f(x ± h) вокруг точки x:

Отсюда получаем (более подробно об этом разложении пишет А. Самарский [1]):

Перепишем формулу (3) другом виде:

Где D – аппроксимация, а (величина, которую мы хотим аппроксимировать).

Выразим D:

При таком выражении D погрешность равна:

где еi обозначает коэффициент при hi в формуле (3), также отметим независимость коэффициентов от h. Мы предполагаем, что в общем случае ei≠0. Таким образом, мы получили аппроксимацию, основанную на значениях f(x) в точках x±h. Чтобы улучшить её, нам необходимо исключить e2h2 из погрешности. Реализовать это можно путем записи аппроксимации, основанной на значениях функции в других точках. Например:

Основная идея состоит в комбинации выражений (7) и (4) для исключения h2. Заметим, что после вычислений в формуле (7) коэффициент при h2 будет равен 4e2. Для получения аналогичного коэффициента в формуле (4) необходимо умножить обе части выражения на 4.

Вычтем выражения друг из друга и получим:

Таким образом нам удалось повысить точность аппроксимации за счет использования большего числа точек. Этот алгоритм можно продолжать и дальше, каждый раз убирая некоторые слагаемые и, тем самым, увеличивая точность вычисления.

Стоит отметить, что в формуле (7) можно использовать другие точки, к примеру h/2. Благодаря этому можно будет получать аппроксимации, основанные на других точках по схеме, описанной выше. Аналогичное описание алгоритма приведено в статье Дорона Леви [2] (p. 88)

Список литературы

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы : учебное пособие / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — Москва : Наука, 1989. — 432 с.
2. Introduction to Numerical Analysis // Levy D. – 2012. – P. 88-98.